ВОКРУГ ТЕОРЕМ ТОПОНОГОВА

В. Н. БЕРЕСТОВСКИЙ

Вступление

Я благодарю организаторов семинара за приглашение сделать доклад. Я расскажу о теоремах Топоногова о сравнении углов и о римановых пространствах неотрицательной кривизны, содержащих прямую линию, обобщениях этих теорем, связанных с ними результатах, и поделиться некоторыми воспоминаниями.

Хочу сообщить пренеприятное известие: с осени 2014 г. в Омском государственном университете геометрия не существует: отменен последний из существовавших геометрических курсов лекций, по аналитической геометрии.

Я имел большое счастье общаться в мои молодые годы с выдающимися геометрами тогдашних кафедр геометрии и топологии и анализа. После окончания обычной средней школы я поступил в НГУ в 1966 г. Аналитическую геометрию читал Игорь Александрович Шведов, дифференциальную геометрию — академик Александр Данилович Александров, однажды его заменял Юрий Федорович Борисов, мой будущий научный руководитель.

Помню рассказ Александра Даниловича на лекции о том, как он в свое время ”разбрасывал задачи для аспирантов и докторантов”. На экзамене по аналитической геометрии Игорь Александрович предложил доказать студенту существование прямой, не пересекающей гиперболический параболоид (седловую поверхность). Студент не смог этого сделать. Игорь Александрович и Лев Николаевич Ивановский обсуждают, как можно решить эту задачу. Игорь Александрович предлагает "посадить всадника в седло и проткнуть ему уши". Экзамен по дифференциальной геометрии я сдавал Виктору Андреевичу Топоногову (обыкновенные дифференциальные уравнения я сдавал академику С.Л.Соболеву!). В качестве задачи он предложил доказать, что винтовая линия на круглом цилиндре — геодезическая. Я не смог сразу это сделать. Он со своим характерным смехом предложил: "прокатите цилиндр по плоскости и след винтовой линии будет прямой".

После летних экзаменов по окончании 2-го курса на пляже Обского моря я решил, что буду специализироваться по геометрии. Но ближе познакомился с кафедрой геометрии и топологии и выбрал научного руководителя я не сразу. Виктор Андреевич был рецензентом моей дипломной работы ”К условию существования тензора кривизны”. Помню, что раз в связи с этим он пригласил меня в свою квартиру на Морском проспекте после пожара (поэтому его звали в то время ”Топоногов, который Погорелов”) и показывал картинки из книжки Дж.Милнора ”Теория Морса”, иллюстрирующие симметрии тензора кривизны.

Дипломы об окончании университета в июне 1971 г. вручал Владимир Иванович Кузьминов.

Кандидатскую диссертацию "К метрическим основаниям римановой геометрии"после разных приключений я защитил лишь в 1979 г. в Казани. Одним из оппонентов был ученик А.Д.Александрова Виктор Абрамович Залгаллер, которого почему-то в "Хрестоматии по истории информатики"2014 г. назвали ”специалистом по аналитической геометрии”. В этой книге напечатано интервью с ним и Анатолием Моисеевичем Вершиком, оппонентом моей докторской диссертации ”Однородные пространства с внутренней метрикой”, защищенной в 1990 г., потому, что Виктор Абрамович ”В течение многих лет занимался, совместно с (академиком) Л.В.Канторовичем (лауреатом Нобелевской премии 1975 г. по экономике) разработкой (линейного программирования).”

Замечу, что названия моей дипломной работы и моей кандидатской диссертации, а также ”дистанционные” для введенных в моей работе 1975 г. ”Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах” [13] координат предложил А.Д.Александров.

1. Теорема Топоногова о сравнении углов и ее обобщения

Теорема 1. *Если полное риманово многообразие M (класса C^2) имеет секционную кривизну $\geq K$, то углы любого треугольника в M (составленного из кратчайших геодезических) не меньше соответствующих углов треугольника сравнения, т.е. треугольника с теми же длинами сторон, в (полной односвязной) плоскости S_K^2 постоянной секционной кривизны K.*

Замечание 1. *S_K^2 — сфера $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{K}$ в евклидовом пространстве $(\mathbb{E}^3, ds^2=dx^2+dy^2+dz^2)$ если $K>0$, поверхность $x^2+y^2-z^2=\frac{1}{K}, z>0$, в псевдоевклидовом пространстве $(\mathbb{E}^{2,1}, ds^2=dx^2+dy^2-dz^2)$, если $K<0$, и евклидова плоскость $(\mathbb{E}^2, ds^2=dx^2+dy^2)$, если $K=0$.*

Замечание 2. *Утверждение теоремы 1 для (достаточно) малых треугольников хорошо известно из классической геометрии. Но теорема 1 имеет глобальный характер, т.е. является теоремой ”римановой геометрии в целом”. Именно поэтому она применялась при изучении топологии (в том числе дифференциальной) полных римановых многообразий.*

Сначала теорема была доказана в [1] для $K=0$, затем в [2] для $K>0$, и в [3] для общего случая.

Условие C^2 в теореме 1 (существованиия вторых частных производных компонент метрического тензора в соответствующих локальных системах координат) является минимальным классическим условием существования непрерывного тензора кривизны на римановом многообразии.

В двумерном случае теорема 1 является частным случаем теоремы А.Д.Александрова в [4] для (в общем случае нерегулярных) поверхностей *кривизны $\geq K$ по А.Д.Александрову*. Определение общих пространств с внутренней метрикой с этим условием (так называемых *пространств Александрова*), а также *с кривизной $\leq K$ по А.Д.Александрову*, дано и в [5].

Отмчу, что *каждое риманово многообразие с секционной кривизной* $\geq K$ *(соответственно,* $\leq K$*) имеет кривизну* $\geq K$ *(соответственно,* $\leq K$*) по А.Д.Александрову.*

Интересно, что теорию и результаты, вполне аналогичные теории и результатам А.Д.Александрова из [4] о двумерных многообразиях *двусторонне ограниченной кривизны*, т.е. кривизны $\leq K'$ и $\geq K$, где $K \leq K'$, (в другой терминологии, *ограниченной удельной кривизны*) ранее построил и получил ученик Карла Менгера Абрахам Вальд (более известный как специалист по теории вероятностей и мат.статистике; погиб в авиакатастрофе в Индии в 1950 г.) в работе [6].

Определения А.Д.Александрова достаточно техничны, требуют рассмотрения треугольников и различных понятий угла. Определения А.Вальда основаны на изометричных вложениях в S^2_K четверок различных точек $\{x, y, z, w\}$ метрического пространства (M, ρ) с условием $\rho(y, z) = \rho(y, w) + \rho(w, z)$.

При переходе к многомерным многообразиям (с включением двумерного случая) или, более общо, произвольным пространствам с внутренней метрикой, такой подход естественно связан с рассмотрением произвольных четверок различных точек пространства и их изометричных вложений в S^3_K. В работе [7] (см. также [8]) установлено, что

Теорема 2. *Метрическое пространство* (M, ρ) *с локальным существованием кратчайших имеет кривизну* $\geq K$ *(и* $\leq K'$*, где* $K \leq K'$*) по А.Д.Александрову тогда и только тогда, когда*

(B) локально каждая четверка точек в (M, ρ) *изометрично вкладывается в* $S^3_{K''}$*, где* $K'' \geq K$ *(соответственно,* $K \leq K'' \leq K'$*) и* K'' *зависит от выбранной четверки точек.*

При этом условие вне скобок в (B) эквивалентно каждому из условий

(B1) локально каждая четверка точек в (M, ρ) *изометрично вкладывается в* $S^2_{K'''}$*, при некотороме* $K''' \geq K$*, зависящем от выбранной четверки точек;*

(B2) локально для каждой четверки $\{x, y, z, w\}$ *точек в* (M, ρ) *сумма углов треугольников* $x'y'z'$, $x'y'w'$, $x'z'w'$ *в* S^2_K *с множеством вершин, изометричных соответственно тройкам* $\{x, y, z\}$, $\{x, y, w\}$, $\{x, z, w\}$*, при вершине* x' *не больше* 2π.

Упомянутые три условия взаимно эквивалентны и глобально.

Замечание 3. *Легко видно, что для полного риманова многообразия глобальное выполнение условия вне скобок в (B) лишь для четверок А.Вальда уже влечет ЗАКЛЮЧЕНИЕ теоремы 1 Топоногова.*

В работе [9] Ю.Бураго, М.Громова, Г.Перельмана пространство кривизны $\geq K$ определяется как *локально полное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющее условию (B2)* и доказывается *Теорема глобализации* 3.2:

Теорема 3. *В полном пространстве кривизны* $\geq K$ *условие (B2) выполняется для любой четверки точек.*

Аналогичная теорема доказана независимо другим способом в работе [10] Конрада Плаута на основе условия вне скобок в (B). В общем случае, в работах [9] и [10] не предполагается существование кратчайших. При таком дополнительном предположении аналогичный результат доказан в работе [11] швейцарских математиков Урса Ленга и Виктора Шредера.

Но остается нерешенным следующий важный вопрос, касающийся аксиоматики пространств кривизны $\geq K$.

Вопрос 1. [12] *А.Д.Александров доказал в* [5]*, что если в метрическом пространстве M с локальным существованием кратчайших локально сумма углов каждого треугольника не больше суммы углов соответствующего треугольника сравнения в S^2_K, то то же верно для каждого угла этого треугольника в M. Верно ли аналогичное утверждение, если заменить слова "не больше"словами "не меньше"?*

2. Синтетическое построение римановой геометрии

В работе [13] 1975 г. доказана

Теорема 4. *Локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq K$ и $\leq K'$, где $K \leq K'$, удовлетворяющее локально условию продолжения кратчайших, изометрично риманову многообразию класса C^0 (с непрерывными компонентами метрического тензора в "дистанционных координатах")*

Замечание 4. *Роль условий двусторонней ограниченности кривизны в статье* [13] *играло некоторое эквивалентное им неравенство A), являющееся следствием соотношений (21) на с. 210 в замечательной книге Эли Картана* [14] *или (29) на с. 293 русского перевода* [15] *расширенного и исправленного издания Э.Картана 1946 г.*

В работах [16] и [17] теорема 4 распространена на случаи с односторонними ограничениями на кривизну.

В 1983 г. И.Г.Николаев доказал при тех же предположениях, что в теореме 4, следующую теорему.

Теорема 5. [18], [19], [20], [12] *Пусть M — пространство с (двусторонне) ограниченной кривизной. Тогда в окрестности каждой его точки можно ввести гармоническую систему координат. Компоненты метрического тензора во всякой гармонической системе координат в M есть непрерывные функции соболевского класса W^2_q, где в качестве q может быть взято любое число, не меньшее единицы (следовательно класса $C^{1,\alpha}$ при любом α, $0 < \alpha < 1$). Гармонические системы координат задают на M атлас класса $C^{3,\alpha}$ при любом α, $0 < \alpha < 1$.*

На основании геометрической конструкции в [19] вводится параллельный перенос векторов вдоль (спрямляемой) кривой, являющийся изометрическим отображением касательных евклидовых пространств в соответствующих точках. Введенный параллельный перенос позволяет доказать, что на самом деле компонентны метрического тензора в дистанционной системе координат являются липшицевыми функциями.Это позволяет ввести в пространстве M гармоническую систему координат и с помощью довольно тонкой аналитической техники доказать в [20] теорему 5.

3. Теорема Топоногова о римановом многообразии неотрицательной кривизны, содержащем прямую линию

Теорема 6. [21] *Если полное риманово многообразие M неотрицательной секционной кривизны содержит множество, изометричное евклидовой прямой $\mathbb{R}$, то M изометрично $N \times \mathbb{R}$, где N — некоторое полное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны.*

В работе [22] Дж.Чигера и Д.Громолла доказано, что условие неположительности секционной кривизны в этой теореме можно заменить более общим условием неположительности кривизны Риччи. Отсюда легко выводится

Теорема 7. *Некомпактное однородное риманово многообразие неотрицательной секционной (соотв., риччиевой) кривизны изометрично прямому метрическому произведению евклидова пространства и компактного однородного риманова многообразия неотрицательной секционной (соотв., риччиевой) кривизны.*

4. Теорема и гипотеза Чигера-Громолла

Теорема 8. [23] ([24]) *Если M — связное полное некомпактное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны, то в M существует компактное вполне геодезическое подмногообразие, "душа", S такое, что M гомеоморфно (диффеоморфно) нормальному векторному расслоению над S.*

В.А.Шарафутдинов в статье [25] построил метрическую ретракцию $Sh : M \to S$. С помощью нее он в работе [26] доказал, что любые две души в M изометричны и нашел критерий единственности души в M.

Гипотеза 1. [23] *Если в условиях теоремы 8 в некоторой точке из M все секционные кривизны положительны, то S — точка, следовательно M диффеоморфно евклидову пространству.*

Г.Перельман доказал в [27], что Sh — *риманова субмерсия* класса C^1 и гипотеза 1 верна. Поскольку Sh — *субметрия* [28], следующая теорема улучшает первое утверждение.

Теорема 9. [28] *Каждая субметрия гладких римановых многообразий является римановой субмерсией класса $C^{1,1}$; в общем случае этот результат не улучшаем.*

Замечу, что в доказательстве этой теоремы существенную роль играют дистанционные системы координат.

Вопрос 2. *Верно ли, что $Sh \in C^\infty$?*

Положительный ответ следовал бы из положительного ответа на

Вопрос 3. [28] *Верно ли, что субметрия связных полных (гладких) римановых многообразий неотрицательной секционной кривизны является римановой субмерсией класса* C^{∞}*?*

Ответ на этот общий вопрос не известен. Тем не менее, в [29], [30] доказано, что ответ на вопрос 2 положителен; при этом в [30] высказано сомнение в достоверности доказательства из [29].

5. Задача Топоногова для студентов [31], [32]

6. Однородные римановы многообразия положительной секционной кривизны

Теорема 10. [8]*Связное локально компактное однородное пространство с внутренней метрикой кривизны* $\leq K$ $(\geq K > 0)$ *по А.Д.Александрову — однородное риманово многообразие с секционной кривизной* $\leq K$ $(\geq K > 0)$.

Замечание 5. *Обратное утверждение очевидно. Утверждение в скобках в общем случае не верно, если* $K \leq 0$.

Принято считать, что с учетом поправки Б.Вилкинга [33], статья Л.Берар-Бержери [34], после предшествующих работ М.Берже, Валлаха и Алоффа, завершает классификацию всех односвязных однородных римановых многообразий положительной секционной кривизны. Однако 10.02.2015 появился препринт [35], авторы которого указывают, по их мнению, серьезный пробел в доказательстве из статьи [34]. На основании этого они считают, что вопрос об упомянутой классификации в нечетной размерности остается открытым.

Список литературы

[1] *Топоногов В.А.* О выпуклости римановых пространств положительной кривизны. ДАН СССР (н.с.), 1957, т. 115, с. 674-676.

[2] *Топоногов В.А.* Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу положительным числом. ДАН СССР (н.с.), 1958, т. 120, с. 719-721.

[3] *Топоногов В.А.* Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. Успехи мат. наук, 1959, 14:1, с. 87-130.

[4] *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.– Л., Гостехиздат, 1948.

[5] *Alexandroff A.* Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie. Schrift. Forsch. Inst. Mat. der Deutschen Acad. Wiss., Hf. 1(1957), S. 33-84.

[6] *Wald A.* Begründung einer koordinatelosen Differentialgeometrie der Flächen. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1935, Hf. 7, S. 24-46.

[7] *Берестовский В.Н.* Пространства с ограниченной кривизной и дистанционная геометрия, Сиб. матем. журн. 1986, т. 27, №1, с. 11-25.

[8] *Berestovskii V.N., Plaut C.P.* Homogeneous spaces of curvature bounded below, J. Geom. Analysis, v.9 (1999), №2, p. 203-219.

[9] *Бураго Ю., Громов М., Перельман Г.* Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами, Успехи мат. наук, 1992, т. 47, вып. 2(284), с. 3-51.

[10] *Plaut C.* Spaces of Wald-Berestovskii curvature bounded below. J. Geom. Anal. 6 (1996), 113-134.

[11] *Lang U., Schroeder V.* On Toponogov's comparison theorem for Alexandrov spaces. L'Enseignement Mathématique (2) 59(2013), 325-336.
[12] *Александров А.Д., Берестовский В.Н., Николаев И.Г.* Обобщенные римановы пространства, Успехи мат. наук, 1986, т. 41, вып. 3 (249), с. 3-44.
[13] *Берестовский В.Н.* Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах, Сиб. матем. журн. 1975, т. 16, №4, с. 651-662.
[14] *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.
[15] *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. — Институт компьютерных исследований. Москва.; Ижевск, 2012.
[16] *Берестовский В.Н.* Многообразия с внутренней метрикой односторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизны, Математическая физика. Анализ. Геометрия. 1994, т. 1, №1, с. 41-59.
[17] *Берестовский В.Н.* Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову, Алгебра и анализ, 2002, т. 14, № 5, с. 3-18.
[18] *Николаев И.Г.* Параллельный перенос и гладкость метрики пространств с ограниченной кривизной. — ДАН СССР, 1980, т. 250, №5, с. 1056-1058.
[19] *Николаев И.Г.* О параллельном переносе векторов в пространствах с двусторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизной. — Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, №1, с. 130-145.
[20] *Николаев И.Г.* О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизной. — Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, №2, с. 114-132.
[21] *Топоногов В.А.* Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии. Сиб. мат. журнал, 1964, т. 5, №6, с. 1358-1369.
[22] *Cheeger J., Gromoll D.* The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. J. Differential Geometry 6 (1971/72), 119-128.
[23] *Cheeger J., Gromoll D.* On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Ann. of Math. (2) 96(1972), №3, 413-443.
[24] *Шарафутдинов В.А.* Полные открытые многообразия неотрицательной кривизны. Сиб. мат. журнал, 1974, т. 15, №1, с. 177-191.
[25] *Шарафутдинов В.А.* Теорема Погорелова-Клингенберга для многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$. Сиб. мат. журнал, 1977, т. 18, № 4, с. 915-925.
[26] *Шарафутдинов В.А.* О выпуклых множествах в многообразиях неотрицательной кривизны. Мат. заметки, 1979, т. 36, № 1, с. 129-136.
[27] *Perelman G.* Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll. J. Differential Geometry 40 (1994), 209-212.
[28] *Berestovskii V.N., Guijarro L.* A Metric Characterization of Riemannian Submersions, Annals of Global Analysis and Geometry 2000, 18: 577-588.
[29] *Cao J., Shaw M.* The smoothness of Riemannian submersions with nonnegative sectional curvature. Communication in Contemporary Math. 7 (2005), 1-8.
[30] *Wilking B.* A duality Theorem for Riemannian foliations in nonnegative sectional curvature. GAFA, Geom. funct. anal. 17 (2007), 1297-1320.
[31] *Берестовский В.Н.* Об одной задаче В.А.Топоногова. Мат. труды, 2010, т. 13, №1, с. 15-22.
[32] *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Функции с (не)временноподобным градиентом на пространстве-времени. Мат. труды, 2014, т. 17, №2, с. 41-60.
[33] *Wilking B.* The normal homogeneous space $(SU(3) \times SO(3))/U^*(2)$ has positive sectional curvature. Proc. Amer. Math. Soc., 1990, 1191-1194.
[34] *Berard-Bergery L.* Les varietes riemannienes homogenes simplement connexes de dimension impair acourbure strictement positive, J. Pure Math. Appl. 55(1976), 47-68.
[35] *Ming Xu,Wolf J.A.* $Sp(2)/U(1)$ and a Positive Curvature Problem. arXiv:1502.02755v1 [math.DG] 10 Feb 2015.

В.Н.Берестовский

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail address: berestov@inbox.ru